惯性定理与合同分类

张金顺

华侨大学数学科学学院(362021)

E-mail: jszhang@hqu.edu.cn

泉州，2007.6.30

参考文献：

- 姚慕生. *高等代数学*. 复旦大学出版社.2003.
- 北京大学数学系.*高等代数*.高等教育出版社.2004.
- Steven Roman. *Advanced Linear Algebra*. Springer-Verian. 1992.

二次型$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$化为标准型$\Leftrightarrow$对称矩阵$A$合同变换为对角矩阵。

定理8.1-1: 对称矩阵必合同于对角矩阵。

结论：二次型一定能够化为标准型。

问题：标准型是否具有唯一性？

二次型化为标准型不具有唯一性！（例题）

若$f(x) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$可分别化为标准型：

$$f(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{By}}{=} \mathbf{b_1 y_1^2} + \cdots + \mathbf{b_p y_p^2} - \cdots - \mathbf{b_r y_r^2}$$

$$f(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{Cz}}{=} \mathbf{c_1 z_1^2} + \cdots + \mathbf{c_k z_k^2} - \cdots - \mathbf{c_r z_r^2}$$

其中$b_i > 0 \;\; c_i > 0, \;\; r = r(A).$

问题:$p, \;\; k$之间的关系是什么?

本质问题：合同变换下的不变量是什么?

惯性定理(Inertial theory):
设实二次型$f(x) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$可化为两个标准型:

$$c_1y_1^2 + \cdots + c_py_p^2 - \cdots c_ry_r^2$$

$$d_1z_1^2 + \cdots + d_kz_k^2 - \cdots - d_rz_r^2$$

其中$c_i > 0 \;\; d_i > 0$。则必有$p = k$.

Note: 不同标准型的共同点（合同不变量）!

规范标准型:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

定义8.3-1：设$f(x) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$是一个实二次型,其规范标准型为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

则称r为该二次型的秩，称p为正惯性指数，$q = r - p$为负惯性指数，$s = p - q$为f的符号差。

定理8.3-2：

惯性指数是实对称矩阵合同关系的全系不变量。

等价关系、

不变量、

分类

矩阵的三类等价关系：

$A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$. (p.61)

$A \approx B \Leftrightarrow A$与$B$的初等因子相同。

实对称矩阵$A \cong B \Leftrightarrow A$与$B$的惯性指数相同。

理解和掌握：三类等价关系和相互之间的联系！

利用惯性定理，对对称矩阵进行分类：正定、半正定、负定。

矩阵的等价(相抵)类:

$A \sim B \Leftrightarrow A = PBQ.$

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n阶矩阵的等价(相抵)分类：$n+1$类。

实对称矩阵的合同等价类:

$$A \cong B \Leftrightarrow A = C'BC.$$

$$A \cong \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n阶实对称矩阵的合同等价分类：$n(n+1)/2$类。

n阶复对称矩阵的合同等价分类：$n+1$类。

Thank you!

华侨大学

2007.6.30

E-mail: jszhang@hqu.edu.cn