



惯性定理与合同分类

张金顺

华侨大学数学科学学院(362021)

E-mail: jszhang@hqu.edu.cn

泉州, 2007.6.30

访问主页

标题页



第 1 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



参考文献:

- 姚墓生. 高等代数学. 复旦大学出版社.2003.
- 北京大学数学系.高等代数.高等教育出版社.2004.
- Steven Roman. *Advanced Linear Algebra*. Springer-Verian. 1992.

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 2 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 化为标准型 \Leftrightarrow 对称矩阵 \mathbf{A} 合同变换为对角矩阵。

定理8.1-1: 对称矩阵必合同于对角矩阵。

结论: 二次型一定能够化为标准型。

问题: 标准型是否具有唯一性?

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 3 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



二次型化为标准型不具有唯一性！（例题）

若 $f(x) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 可分别化为标准型：

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\mathbf{B}y}{=} b_1y_1^2 + \cdots + b_p y_p^2 - \cdots - b_r y_r^2$$

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\mathbf{C}z}{=} c_1z_1^2 + \cdots + c_k z_k^2 - \cdots - c_r z_r^2$$

其中 $b_i > 0$ $c_i > 0$, $r = r(A)$.

问题： p , k 之间的关系是什么？

本质问题：合同变换下的不变量是什么？

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 4 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



惯性定理(Inertial theory):

设实二次型 $f(x) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 可化为两个标准型:

$$c_1y_1^2 + \cdots + c_p y_p^2 - \cdots - c_r y_r^2$$

$$d_1z_1^2 + \cdots + d_k z_k^2 - \cdots - d_r z_r^2$$

其中 $c_i > 0$ $d_i > 0$ 。则必有 $p = k$ 。

Note: 不同标准型的共同点 (合同不变量) !

规范标准型:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 5 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



定义8.3-1: 设 $f(x) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 是一个实二次型, 其规范标准型为

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

则称 r 为该二次型的秩, 称 p 为正惯性指数, $q = r - p$ 为负惯性指数, $s = p - q$ 为 f 的符号差。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 6 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



定理8.3-2:

惯性指数是实对称矩阵合同关系的全系不变量。

访问主页

标题页

◀▶

◀▶

第 7 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



等价关系、
不变量、
分类

访问主页

标题页



第 8 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



矩阵的三类等价关系：

$$A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B). \quad (\text{p.61})$$

$A \approx B \Leftrightarrow A$ 与 B 的初等因子相同。

实对称矩阵 $A \cong B \Leftrightarrow A$ 与 B 的惯性指数相同。

理解和掌握：三类等价关系和相互之间的联系！

利用惯性定理，对对称矩阵进行分类：正定、半正定、负定。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 9 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



矩阵的等价(相抵)类:

$$A \sim B \Leftrightarrow A = PBQ.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n 阶矩阵的等价(相抵)分类: $n + 1$ 类。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 10 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



实对称矩阵的合同等价类:

$$A \cong B \Leftrightarrow A = C'BC.$$

$$A \cong \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n 阶实对称矩阵的合同等价分类: $n(n+1)/2$ 类。

n 阶复对称矩阵的合同等价分类: $n+1$ 类。

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 11 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出



Thank you!

华侨大学
2007.6.30

E-mail: jszhang@hqu.edu.cn

访问主页

标题页



第 12 页 共 12

返回

全屏显示

关闭

退出